§ 1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Принцип Даламбера для материальной точки

Законы Ньютона содержат в себе все необходимое для рассмотрения движения любых механических систем. Но первоначально они применялись только для рассмотрения движения свободной материальной точки и свободного твердого тела до тех пор, пока не была дополнительно сформулирована аксиома связей. Для рассмотрения движения несвободных систем Даламбер предложил специальный принцип, получивший название **принципа Даламбера**. Этот принцип был сформулирован в терминах «потерянных» движений.

В настоящее время, когда считается справедливой аксиома связей, уравнения движения несвободной материальной точки являются такими же, как и для свободной, только к действующим на точку активным или заданным силам добавляют силы реакций связей.

Современное выражение принципа Даламбера не отличается по содержанию от уравнений движения материальной точки, но для многих задач оно более удобно. Принцип Даламбера для свободной материальной точки эквивалентен основному закону динамики. Для несвободной точки он эквивалентен основному закону вместе с аксиомой связей.

Уравнение движения материальной точки массой m относительно инерциальной системы отсчета под действием приложенных активных сил и реакций связей имеет вид

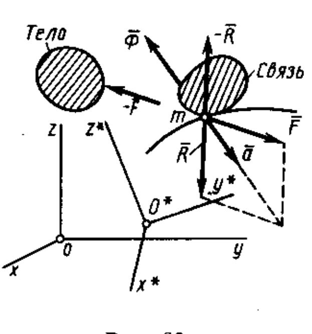

Рис. 82

$$m\bar{a}=\bar{F}+\bar{R}. \qquad (1)$$

Сила $\bar{F}$ является равнодействующей активных сил, $\bar{R}$ — равнодействующей реакций связей, $\bar{a}$ — ускорением точки относительно инерциальной системы отсчета. Назовем *силой инерции* материальной точки произведение массы точки на вектор ускорения, взятое с обратным знаком, т. е. $\bar{\Phi}=-m\bar{a}$. Если использовать понятие силы инерции точки и перенести все слагаемые (1) в правую часть уравнения, то получим

$$\bar{F}+\bar{R}+\bar{\Phi}=0. \qquad (2)$$

Так как силы $\bar{F}$, $\bar{R}$ и $\bar{\Phi}$ (рис. 82) образуют систему сходящихся сил и удовлетворяют условию (2), то они являются системой сил, эквивалентной нулю, т. е.

$$\{\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi}\}\backsim 0. \qquad (3)$$

Уравнение (2) или эквивалентное ему условие (3) выражает принцип Даламбера для точки: *при движении материальной точки активные силы и реакции связей вместе с силой инерции точки образуют равновесную систему сил.*

Из (2) в проекциях на координатные оси получаем три условия равновесия сил:

$$F_x+R_x+\Phi_x=0;\ \ F_y+R_y+\Phi_y=0;\ \ F_z+R_z+\Phi_z=0. \qquad (4)$$

Ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета можно разложить на составляющие по осям декартовой системы координат, а также на касательное и нормальное ускорения и на переносное, относительное ускорения и ускорение Кориолиса, если движение точки считать сложным, состоящим из переносного и относительного. Соответственно силу инерции $\bar{\Phi}$ можно разложить на такие же составляющие:

$$\bar{\Phi}=\Phi_x\bar{i}+\Phi_y\bar{j}+\Phi_z\bar{k}=\bar{\Phi}_\tau+\bar{\Phi}_n=\bar{\Phi}_e+\bar{\Phi}_\tau+\bar{\Phi}_к. \qquad (5)$$

Касательная сила инерции

$$\bar{\Phi}_\tau=-m\bar{a}_\tau,$$

где $\bar{a}_\tau$ — касательное ускорение; нормальная, или центробежная, сила инерции

$$\bar{\Phi}_n=-m\bar{a}_n,$$

где $\bar{a}_n$ — нормальное ускорение. Переносная и относительная силы инерции, а также сила инерции Кориолиса через ускорения выражаются соответственно так:

$$\bar{\Phi}_e=-m\bar{a}_e;\ \ \bar{\Phi}_r=-m\bar{a}_r;\ \ \bar{\Phi}_к=-m\bar{a}_к.$$

Аналогично выражаются через проекции ускорения на прямоугольные оси координат проекции силы инерции Φ_x, Φ_y, Φ_z. На силы инерции существует несколько точек зрения. Согласно первой точке зрения, сила инерции условно прикладывается к точке, чтобы уравнению движения (1) придать более удобную форму условия равновесия (2). Поэтому силу инерции $\bar{\Phi}$ называют **фиктивной, даламберовой, условной** и т. д. С этой точки зрения силы инерции в принципе Даламбера не являются настоящими, реальными силами и отличаются не только от обычных сил, создаваемых действием тел, но даже и от сил инерции в относительном движении.

Согласно другой, наиболее распространенной точке зрения, сила инерции считается приложенной по частям к «ускоряющим» телам. Для обоснования приводят следующие рассуждения. Материальная точка движется с ускорением $\bar{a}$ потому, что на нее действуют какие-то тела с силой, равной $(\bar{F}+\bar{R})$ (см. рис. 83). По закону о равенстве сил действия и противодействия материальная точка должна оказывать противодействие этим телам с такой же по модулю, но противоположной по направлению силой $-(\bar{F}+\bar{R})$, которая, согласно (2), равна силе инерции $\bar{\Phi}$, т. е. $\bar{\Phi}=-(\bar{F}+\bar{R})$.

Это соотношение дает основание считать, что сила инерции приложена к «ускоряющим» телам, т. е. телам, которые сообщают точке ускорение.

Действительно, сила инерции $\bar{\Phi}$ является векторной суммой сил действия точки на «ускоряющие» ее тела. Она служит суммарной оценкой этого действия. Однако при рассмотрении относительного движения точки вводятся переносная $\bar{\Phi}_e$ и кориолисова силы инерции $\bar{\Phi}_к$. Для подвижного наблюдателя их следует считать приложенными к движущейся материальной точке, но для них невозможно указать материальные тела, действием которых на точку можно объяснить эти силы.

Переносная и кориолисова силы инерции являются частью полной силы инерции $\bar{\Phi}$. Если для части силы невозможно указать тела, которые ее создают, то это же справедливо и для всей силы инерции $\bar{\Phi}$. Однако в рассматриваемом случае указывается материальный объект, который действует с силой инерции $\bar{\Phi}$ на ускоряющие тела. Этим объектом является движущаяся с ускорением материальная точка.

Согласно третьей точке зрения, силу инерции считают приложенной к движущейся материальной точке, по крайней мере это справедливо для наблюдателя, который находится в собственной системе отсчета этой точки. *Собственной системой отсчета материальной точки* называют такую систему отсчета, относительно которой точка находится в покое, т. е. относительно которой ее относительные скорость и ускорение равны нулю. В этой системе отсчета справедливо условие относительного равновесия для сил

$$\bar{F}+\bar{R}+\bar{\Phi}_e^*=0,$$

где $\bar{\Phi}_e^*=-m\bar{a}_e^*$ — переносная сила инерции в собственной системе отсчета. Но в собственной системе отсчета $\bar{v}_r^*=0$, $\bar{a}_r^*=0$ и кориолисово ускорение $\bar{a}_к^*=0$, а тогда $\bar{a}=\bar{a}_e^*$ и, следовательно, $\bar{\Phi}=\bar{\Phi}_e^*$.

Таким образом, *принцип Даламбера есть условие относительного равновесия для сил в собственной системе отсчета.* Относительно собственного наблюдателя сила инерции $\bar{\Phi}_e^*$ приложена к движущейся точке, а следовательно, к ней приложена и совпадающая с переносной силой инерции в собственной системе отсчета $\bar{\Phi}_e^*$ сила инерции абсолютного движения $\bar{\Phi}$. Силу $\bar{\Phi}$ в этом случае считают дополнительным действием на точку поля Вселенной. Такая точка зрения на силы инерции требует изменения понятия **приложенной** силы и изменения некоторых основных аксиом динамики (см. Приложение).

Принцип Даламбера для системы материальных точек

Рассмотрим систему N материальных точек. К каждой точке системы в общем случае приложены равнодействующая активных сил и равнодействующая реакций связей. Применяя принцип Даламбера к каждой точке системы, получим

$$\bar{F}_k+\bar{R}_k+\bar{\Phi}_k=0,\ \ k=1, 2, ..., N, \qquad (6)$$

где $\bar{\Phi}_k=-m_k\bar{a}_k$ — сила инерции для k-й точки (рис. 83).

Условия (6) можно представить в эквивалентной форме:

$$\{\bar{F}_k, \bar{R}_k, \bar{\Phi}_k\}\backsim 0,\ \ k=1, 2, ..., N; \qquad (7)$$

N векторных условий (6) или (7) выражают принцип Даламбера для системы: *при движении механической системы активная сила и реакция связей вместе с силой инерции составляют равновесную систему сил для каждой точки системы.*

Принцип Даламбера для системы по своему содержанию не отличается от уравнений движения точек системы.

Представим равнодействующую силу, приложенную к каждой точке системы, разложенной не на активную силу и реакцию связей, а на внутреннюю и внешнюю силы по отношению ко всей системе:

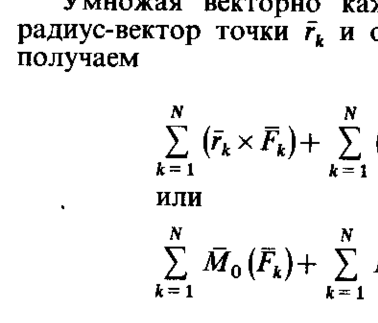

Рис. 83

$$\bar{F}_k+\bar{R}_k=\bar{F}_k^{(e)}+\bar{F}_k^{(i)}.$$

Тогда принцип Даламбера для системы можно представить в другой форме:

$$\bar{F}_k^{(e)}+\bar{F}_k^{(i)}+\bar{\Phi}_k=0,\ \ k=1, 2, ..., N. \qquad (8)$$

Из принципа Даламбера для системы в форме (6) или (8) можно получить следствия в виде шести

условий равновесия для сил, действующих на точки системы, и сил инерции.

Если просуммировать левые части (6) по всем точкам системы, то

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k+\sum_{k=1}^N \bar{R}_k+\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k=0. \qquad (9)$$

Умножая векторно каждое из соотношений (6) слева на радиус-вектор точки $\bar{r}_k$ и опять суммируя по точкам системы, получаем

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^N (\bar{r}_k\times\bar{F}_k)+\sum_{k=1}^N (\bar{r}_k\times\bar{R}_k)+\sum_{k=1}^N (\bar{r}_k\times\bar{\Phi}_k)=0,\\ &\text{или}\\ &\sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_k)+\sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{R}_k)+\sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Следствие из принципа Даламбера (10) справедливо как для неподвижной в рассматриваемой инерциальной системе отсчета точки, так и движущейся, так как начало радиусов-векторов $\bar{r}_k$ можно выбирать в любой точке.

Условия (9) и (10), если выразить их через проекции на координатные оси, дадут шесть условий равновесия, аналогичных условиям равновесия сил, приложенных к твердому телу, в статике.

Если использовать принцип Даламбера в форме (8), то получим следствия в форме

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}+\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k=0; \qquad (11)$$

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)})+\sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k)=0, \qquad (12)$$

так как внутренние силы системы по свойству этих сил удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)}=0;\ \ \sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(i)})=0.$$

Если спроецировать (11) и (12) на координатные оси, то опять получим шесть условий равновесия для сил. Особенностью условий равновесия сил в форме (11) и (12) является отсутствие в них внутренних сил, что делает их особенно удобными при решении многих задач динамики системы.

В действительности условие (11) представляет собой теорему об изменении количества движения, а (12) — теорему об

изменении кинетического момента для системы, если их представить в форме

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}-\frac{d\bar{Q}}{dt}=0; \qquad (11')$$

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)})-\frac{d\bar{K}_0}{dt}=0. \qquad (12')$$

Сравнивая (11) с (11′) и (12) с (12′), получаем формулы для вычисления главных вектора и момента сил инерции системы через количество движения и кинетический момент:

$$\bar{\Phi}=\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k=-\frac{d\bar{Q}}{dt}; \qquad (13)$$

$$\bar{L}_O^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k)=-\frac{d\bar{K}_0}{dt}. \qquad (14)$$

В (12′) точка O неподвижна в выбранной инерциальной системе отсчета. Следовательно, по формуле (14) можно вычислить главный момент сил инерции только для неподвижной точки O. Для движущейся точки вместо (12′) следует использовать ранее доказанную теорему об изменении кинетического момента для движущейся точки A:

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_A(\bar{F}_k^{(e)})-\frac{d\bar{K}_A}{dt}+M\bar{v}_C\times\bar{v}_A=0. \qquad (12'')$$

После замены в (12) точки O на A и сравнения с (12″) получим формулу для вычисления главного момента сил инерции относительно движущейся точки А:

$$\bar{L}_A^{(\Phi)}=-\frac{d\bar{K}_A}{dt}+M\bar{v}_C\times\bar{v}_A=-\left(\frac{d\bar{K}_A}{dt}+\bar{v}_A\times M\bar{v}_C\right). \qquad (14')$$

В формуле (14′) $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_C$ — соответственно скорости точки A и центра масс C относительно рассматриваемой инерциальной системы отсчета; M — масса системы.

Так как $\bar{Q}=M\bar{v}_C$, то для главного вектора сил инерции получаем формулу

$$\bar{\Phi}=\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k=-\frac{d\bar{Q}}{dt}=-M\bar{a}_C. \qquad (15)$$

Здесь M — масса системы, $\bar{v}_C$ и $\bar{a}_C$ — скорость и ускорение центра масс соответственно.

В тех случаях движения твердого тела, когда силы инерции приводятся к равнодействующей, последняя совпадает по модулю и направлению с главным вектором этих сил. Но равнодействующая сил инерции необязательно проходит через центр масс тела, хотя ее модуль и направление всегда определяются по формуле (15).

Проецируя векторы из (14) на ось Oz, получаем

$$L_z^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^N M_z(\bar{\Phi}_k)=-\frac{dK_z}{dt}. \qquad (14'')$$

Аналогичные формулы можно получить и для других координатных осей. В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz, как известно,

$$K_z=J_z\omega.$$

Подставляя это значение K_z в (14″), имеем

$$\sum_{k=1}^N M_z(\bar{\Phi}_k)=-\frac{dK_z}{dt}=-J_z\frac{d\omega}{dt}=-J_z\varepsilon,$$

или

$$L_z^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^N M_z(\bar{\Phi}_k)=-J_z\varepsilon. \qquad (16)$$

По формуле (16) вычисляют момент сил инерции относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси. Этот момент создают касательные силы инерции, так как нормальные силы инерции для каждой точки тела пересекают ось вращения и, следовательно, момента не создают.

Из принципа Даламбера для системы можно получить еще одно следствие — теорему об изменении кинетической энергии. Для этого умножаем (8) скалярно на $d\bar{r}_k$ и суммируем полученные соотношения по всем точкам. Получаем

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(e)}\cdot d\bar{r}_k+\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^{(i)}\cdot d\bar{r}_k+\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k\cdot d\bar{r}_k=0,$$

или в других обозначениях

$$\sum_{k=1}^N dA_{\bar{F}_k^{(e)}}+\sum_{k=1}^N dA_{\bar{F}_k^{(i)}}+\sum_{k=1}^N dA_{\bar{\Phi}_k}=0. \qquad (17)$$

Сравнивая (17) с теоремой об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

$$\sum_{k=1}^N dA_{\bar{F}_k^{(e)}}+\sum_{k=1}^N dA_{\bar{F}_k^{(i)}}-dT=0,$$

получаем выражение для суммы элементарных работ сил инерции через кинетическую энергию системы T:

$$\sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k\cdot d\bar{r}_k=\sum_{k=1}^N dA_{\bar{\Phi}_k}=-dT. \qquad (18)$$

Интегрируя (18), получаем

$$\sum_{k=1}^N A_{\bar{\Phi}_k}=-(T-T_0). \qquad (19)$$

Таким образом, *сумма работ сил инерции на каком-либо перемещении системы равна изменению кинетической энергии на этом перемещении, взятому с обратным знаком.*

Методы решения задач динамики с использованием сил инерции называют *кинетостатическими.*

Силы инерции твердого тела в частных случаях его движения

При поступательном движении. Если твердое тело движется поступательно, то ускорения его точек одинаковы. Силы инерции этих точек составляют систему параллельных сил, направленных в одну сторону. Такая система сил приводится к равнодействующей силе $\bar{\Phi}^*$, которая равна главному вектору, т. е.

$$\bar{\Phi}^*=\bar{\Phi}=-M\bar{a}_C.$$

Линия действия равнодействующей силы инерции в этом случае проходит через центр масс, так как главный момент сил инерции точек тела относительно центра масс

$$\bar{L}_C^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{\Phi}_k)=0.$$

Действительно, согласно следствию из принципа Даламбера (12) для центра масс, имеем

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)})+\bar{L}_C^{(\Phi)}=0.$$

При поступательном движении тело не совершает вращения вокруг центра масс и поэтому $\sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)})=0$. Следовательно, и $\bar{L}_C^{(\Phi)}=0$.

При вращении вокруг неподвижной оси. Если выбрать за центр приведения сил инерции точку O на оси вращения Oz, то в этой точке получим главный вектор и главный момент сил инерции:

$$\bar{\Phi}=-M\bar{a}_C;\ \ \bar{L}_O^{(\Phi)}=-d\bar{K}_O/dt.$$

Если центр масс находится на оси вращения, то $\bar{\Phi}=0$. Проекции главного момента сил инерции на неподвижные оси координат в общем случае можно вычислить по формулам

$$L_x^{(\Phi)}=-dK_x/dt\neq 0;\ \ L_y^{(\Phi)}=-dK_y/dt\neq 0;\ \ L_z^{(\Phi)}=-dK_z/dt=-J_z\varepsilon.$$

Моменты сил инерции $L_x^{(\Phi)}$ и $L_y^{(\Phi)}$ вычисляются в следующем параграфе. Они равны нулю, если ось Oz является главной осью инерции для точки O.

При плоском движении. Выбрав за центр приведения сил инерции центр масс, получим в этой точке главный вектор и главный момент сил инерции. Для главного вектора сил инерции имеем

$$\bar{\Phi}=-M\bar{a}_C.$$

Для главного момента сил инерции относительно центра масс C, который является движущейся точкой при плоском движении тела, получим формулы, аналогичные формуле (14) выведенной для неподвижной точки O.

Согласно следствию из принципа Даламбера (12), главный момент сил инерции относительно центра масс удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)})+\bar{L}_C^{(\Phi)}=0.$$

С другой стороны, из теорем об изменении кинетического момента относительно центра масс для абсолютного и относительного движений имеем

$$d\bar{K}_C/dt=\sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)});\ \ d\bar{K}_C^{(r)}/dt=\sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Из этих соотношений следует

$$\bar{L}_C^{(\Phi)}=-d\bar{K}_C/dt=-d\bar{K}_C^{(r)}/dt.$$

Проекции $L_{Cx}^{(\Phi)}$, $L_{Cy}^{(\Phi)}$ на оси координат с началом в центре масс и движущиеся поступательно вместе с центром масс соответственно

$$L_{Cx}^{(\Phi)}=-dK_{Cx}^{(r)}\neq 0;\ \ \ L_{Cy}^{(\Phi)}=-dK_{Cy}^{(\Phi)}/dt\neq 0;$$

$$L_{Cz}^{(\Phi)}=-dK_{Cz}^{(r)}/dt=-J_{Cz}\varepsilon,$$

где ось Cz перпендикулярна плоскости, параллельно которой совершают движение точки тела.

Моменты сил инерции $L_{Cx}^{(\Phi)}$ и $L_{Cy}^{(\Phi)}$ вычисляются так же, как и при вращении тела вокруг неподвижной оси. Они равны нулю, если ось Cz является главной осью инерции для точки C. Это, в частности выполняется, если тело имеет плоскость симметрии, проходящую через центр масс и параллельную плоскости движения тела.